

文章编号: 1000-8055 (2004) 02-0254-05

航空发动机 H_∞ /PI 输出反馈控制 ——非严格正则 LM I 方法

王 曦, 覃道亮

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘要: 基于传递函数矩阵 H_∞ 范数的等价原则思想, 将非严格正则模型转化为严格正则模型。通过 LM I 求解方法, 在考虑控制能量约束的条件下, 对严格正则模型进行静态输出反馈 PI 控制器设计。提出了一种非严格正则模型静态输出反馈 PI 控制器求解的算法。以某型双转子涡轮发动机为被控对象, 进行静态输出反馈 PI 控制器的 LM I 设计, 并分区域在飞行包线进行了动态性能和鲁棒性能仿真验证。

关键词: 航空、航天推进系统; H_∞ 范数; 非严格正则; 线性矩阵不等式; PI 控制; 静态输出反馈; 能量约束

中图分类号: O 233. 7

文献标识码: A

H_∞ /PI Output Feedback Control of Aero-Engine Under Nonstrict Properness Based on LM I

WANG Xi, TAN Dao-liang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: According to the physical meaning of the H_∞ norm, a nonstrict proper model is converted into some strict proper model under the equivalence condition of their H_∞ norms. A static output feedback PI controller for the resulting strict proper model is designed on the basis of LM I, and control constraints are taken into consideration in the design process of the controller. An algorithm for solving the static output feedback PI controller is presented. This method is applied to the design procedure of aero-engine controller. The dynamical and static performances of the aero-engine control system are verified at different partitioned regions of flight envelope.

Key words: aerospace propulsion system; H_∞ norm; nonstrict proper; linear matrix inequality; PI control; static output feedback; control constraints

线性矩阵不等式 LM I (Linear Matrix Inequality) 方法是一种凸优化方法, 具有许多优点 (如可求得问题的全局最优解等), 利用研究成熟的内点算法, 可对问题进行高效最优求解。因而 LM I 方法在控制理论及工程中得到广泛应用,

如控制结构选择, 鲁棒控制器分析与设计等^[1]。将 LM I 方法应用到航空发动机控制器的设计中, 具有一定理论及实际意义。而实际问题中, 当航空发动机传递函数矩阵模型不是严格正则时, 直接利用 LM I 方法对其设计静态输出反馈 PI 型控制

收稿日期: 2004- 01- 08; **修订日期:** 2004- 03- 15

作者简介: 王曦 (1961-), 男, 山西阳曲人, 北京航空航天大学能源与动力工程学院副研究员, 主要从事航空发动机控制、鲁棒控制、计算机数据采集、处理及测试等研究

器, 受到一定限制。根据传递函数矩阵无穷范数的物理意义, 在无穷范数等价条件下, 将非严格正则模型转化为严格正则模型, 利用 LMI 方法对转化后的严格正则模型, 进行 PI 控制器设计。所述方法, 对某双转子发动机模型进行静态输出反馈 PI 控制器设计, 并对其性能进行仿真验证。

1 问题描述

考虑系统 Σ

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

其中, $x \in R^n$, $u \in R^p$, $y \in R^q$, 分别为系统状态向量、控制向量和输出向量。

对系统 Σ , 设计输出反馈 PI 控制器:

$$u(t) = F_P y(t) + F_I \int_0^t y(\tau) d\tau$$

使闭环系统稳定。其中, $F_P, F_I \in R^{p \times q}$, 为待求矩阵。

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - XBB^T P - PBB^T X + XBB^T X & (B^T P + F_P C)^T \\ B^T P + F_P C & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & x_0^T P \\ P x_0 & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} -P & C^T F_P^T \\ F_P C & -u_{\max}^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

证明: 由文献 [3] 知, 若 (1) 式成立, 则系统稳定。由矩阵 Schur 补引理 [2] 知, 公式 (2) 和 (3) 可保证 $\|u\| < u_{\max}$ 。

利用引理 1, 通过优化 γ 值, 将非严格正则模型 $[A, B, C, D]$ 转化为对应严格正则模型 $[A_M, B_M, C_M, 0]$ 。基于定理 1, 对 $[A_M, B_M, C_M, 0]$ 进行 PI 控制器设计, 而 PI 控制器设计问题可转化为增广系统 Σ 的比例控制器设计问题。

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases}$$

其中:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

基于文献 [3] 中的 LMI 算法思想, 对于非

优化问题 1: $\min \alpha$, subject to

$$\begin{bmatrix} A_M^T P_j + P_j A_M - X_j B_M B_M^T P_j - P_j B_M B_M^T X_j + X_j B_M B_M^T X_j - \alpha P_j & (B_M^T P_j + F_P C_M)^T \\ B_M^T P_j + F_P C_M & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

2 非严格正则模型转化为严格正则模型

引理 1 [2] 设: $G(s) = [A, B, C, D]$ 则存在 $\gamma > 0$, 使:

$\|G(s)\|_\infty = \|C(SI - A)^{-1}B + D\|_\infty < \gamma$
的充分必要条件是: $\gamma^2 I - D^T D > 0$

$$\|C_M(SI - A_M)^{-1}B_M\| < 1$$

其中: $A_M = A + B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}D^T C$

$$B_M = B(\gamma^2 I - D^T D)^{-1/2}$$

$$C_M = [I + D(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}D^T]^{1/2}C$$

且 A_M 为稳定阵。

定理 1 假设系统 Σ 严格正则, 即 $D = 0$ 。如果存在正定阵 P , X 及矩阵 F_P 满足矩阵不等式 (1), (2) 和 (3) 时, 则系统 Σ 可由比例控制器 $u = F_P y(t)$ 稳定, 且有 $\|u\| < u_{\max}$ 。 $\|\cdot\|$ 表示欧氏向量 2 范数, x_0 为系统初态。

严格正则系统, 得到对其进行静态输出反馈比例控制器设计的 LMI 算法如下。

LMI 算法:

步骤 1: 求取非严格正则系统 u 到 y 传递函数矩阵无穷范数, 记为 ghinf_0 。取:

$$\gamma = \text{ghinf}_0 + \rho, \quad 0 < \rho < 1$$

步骤 2: 按引理 1, 将 $[A, B, C, D]$ 转化为 $[A_M, B_M, C_M, 0]$ 。

步骤 3: 选正定阵 Q_0 。一般, 取 $Q = I$, 维数等于系统阶次。求解 Riccati 代数方程:

$$A_M^T P + P A_M - P B_M B_M^T P + Q = 0$$

赋初值 $\text{flag} = 0$, $j = 1$, $X_j = P_0$ 。

步骤 4: if $\text{flag} = 0$, 求解关于 P_j, F_P, α 的优化问题 1, else 求解关于 P_j, F_P, α 的优化问题 2。其中优化问题 1、优化问题 2 定义如下:

其中: α_{opt} 为优化问题 1 的最优解。

优化问题 2: $\min \alpha$, subject to (2), (3) 和 (4)。 α_{opt} 为优化问题 2 的最优解。

步骤 5: if $\alpha_{\text{opt}} \leq 0$
if flag = 1 F_P 为所求 P 控制器, 迭代结束;
elseif $\alpha_{\text{opt}} \leq \theta$ and flag = 0 则 flag = 1;
else $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$, 转步骤 4。 此处 θ 作为裕度值是为保证优化问题 2 有解。

步骤 6: 求解关于 P_j, F_P 的优化问题 3。

优化问题 3: $\min \text{trace}(P_j)$ subject to (4)

其中 α 为优化问题 1 (flag = 0) 或 2 (flag = 1) 的最优解, $\text{trace}(P_j)$ 表示对矩阵 P_j 求迹。

步骤 7: if $\|X_j - P_j\| < \delta$ ($\delta = 1e-6$), then 系统不能由比例控制器来稳定, 程序停止;
else $j = j + 1, X_j = P_j$, 转步骤 2。

3 算 例

在某型双转子涡喷发动机飞行包线区域^[4]第三工作区 (共 24 个工作点), 选取第 12 个工作点 ($H = 6.5 \text{ km}$, $Ma = 0.9$ 和 N_L 最大工作状态) 为设计点, 其归一化状态空间模型为:

$$A = \begin{bmatrix} -1.6952 & 1.0909 \\ -0.1402 & -2.1066 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.4165 & 1.3994 \\ 0.3489 & 0.2871 \end{bmatrix}$$

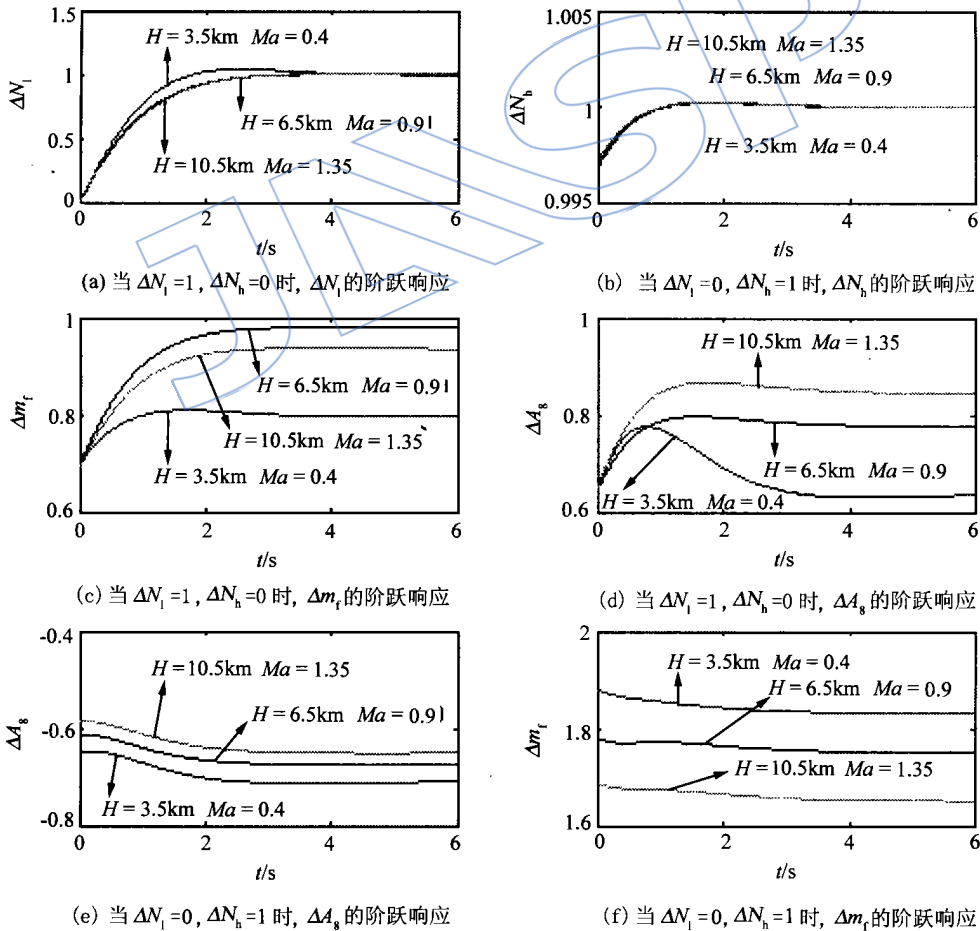


图 1 当 $\gamma = 1.1$ 时, 发动机在飞行包线内第三工作区^[4]中 3 个不同工作点的阶跃响应

Fig 1 Step response of some aero-engine at three working points in the third partitioned region^[4] when $\gamma = 1.1$

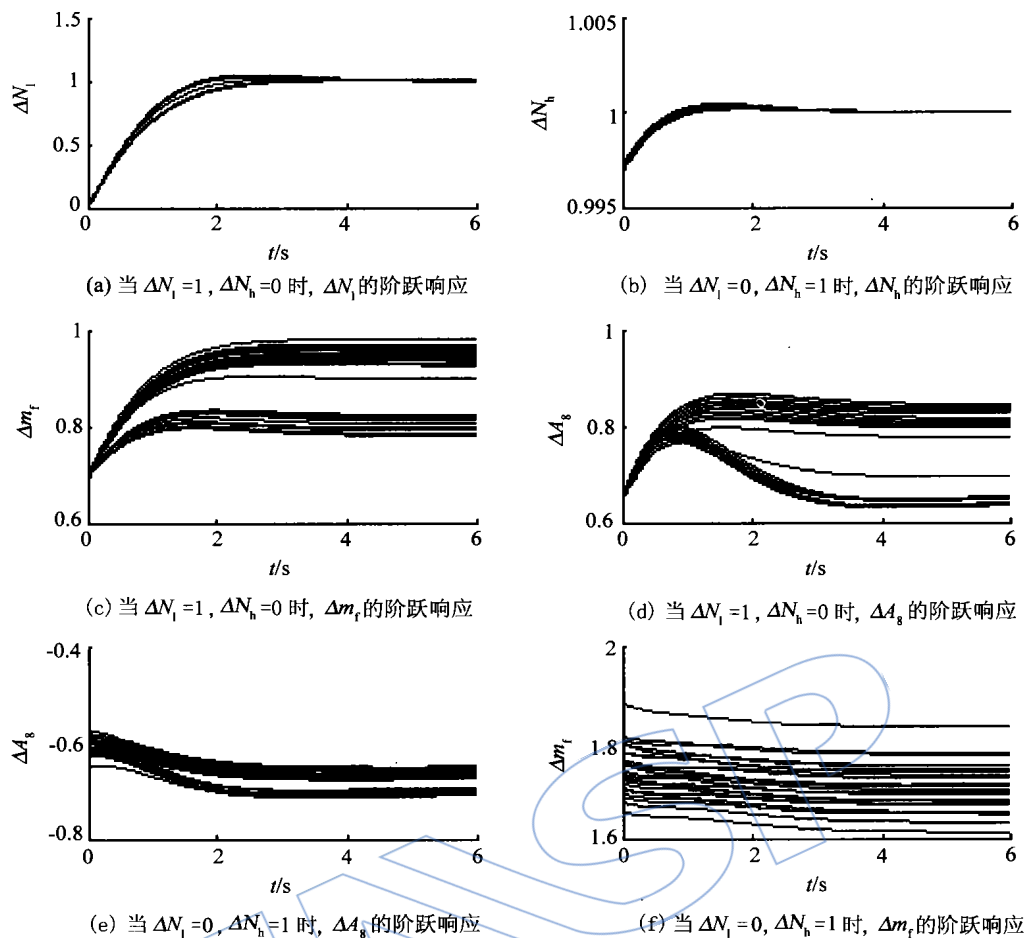


图 2 当 $\gamma = 1.1$ 时, 发动机在飞行包线内第三工作区^[4]24 个工作点的阶跃响应

Fig 2 Step response of some aero-engine at 24 working points in the third partitioned region^[4] when $\gamma = 1.1$

$$C = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 \\ -0.3059 & 0.0350 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.4868 & -0.2090 \end{bmatrix}$$

当取 $\gamma = 1.1$ 时, 得:

$$A_M = \begin{bmatrix} -1.6657 & 1.0875 \\ -0.1764 & -2.1025 \end{bmatrix}$$

$$B_M = \begin{bmatrix} 0.493 & 1.5303 \\ 0.3578 & 0.3269 \end{bmatrix}$$

$$C_M = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 \\ 0.0092 & 0.0308 \end{bmatrix}$$

利用上述 LMI 算法, 取 $u_{\max} = 1$, 对 $[A_M, B_M, C_M]$ 设计静态输出反馈 PI 控制器, 得:

$$F_P = \begin{bmatrix} 10.2367 & -595.9026 \\ -4.2848 & 207.0391 \end{bmatrix}$$

$$F_I = \begin{bmatrix} 18.3 & -1476.5 \\ -8.0 & 536.8 \end{bmatrix}$$

图 1 是利用上述设计方法, 在发动机系统飞行包线第三工作区域内 (共 24 个工作点), 选取第 12 个工作点为标称工作点, 求取控制器, 并将此控制器加到此工作区内第 1, 12, 24 个工作点的单位阶跃响应。由图 1 知, 所设计的静态输出反馈 PI 控制器, 具有较好的动、静态品质 (低压转子 $t_s < 1.7$ s, $\sigma < 2\%$, 高压转子 $t_s < 1.0$ s, $\sigma < 0.2\%$), 并且控制输出幅值较小。图 1 (a), (c) 和 (d) 是当 $\Delta N_L = 1, \Delta N_h = 0$ 时, $\Delta N_L, \Delta m_f$ 和 ΔA_8 对 ΔN_L 阶跃响应。图 1 (b), (e) 和 (f) 是当 $\Delta N_L = 0, \Delta N_h = 1$ 时, $\Delta N_h, \Delta A_8$ 和 Δm_f 对 ΔN_h 阶跃响应。在图 1 (b) 中, 由于仿真曲线基本重合, 故省略标注。基于此控制器的工作区域内其他工作点仿真曲线与上图类似, 如图 2 所示。由图 2 知, 此控制器可稳定此工作区域内的所有工作点, 且具有较好的品质, 具有一定的鲁棒性。

类似地取 $\gamma = 10$ 时, $u_{\max} = 1$, 仍按上述设计方法, 求得:

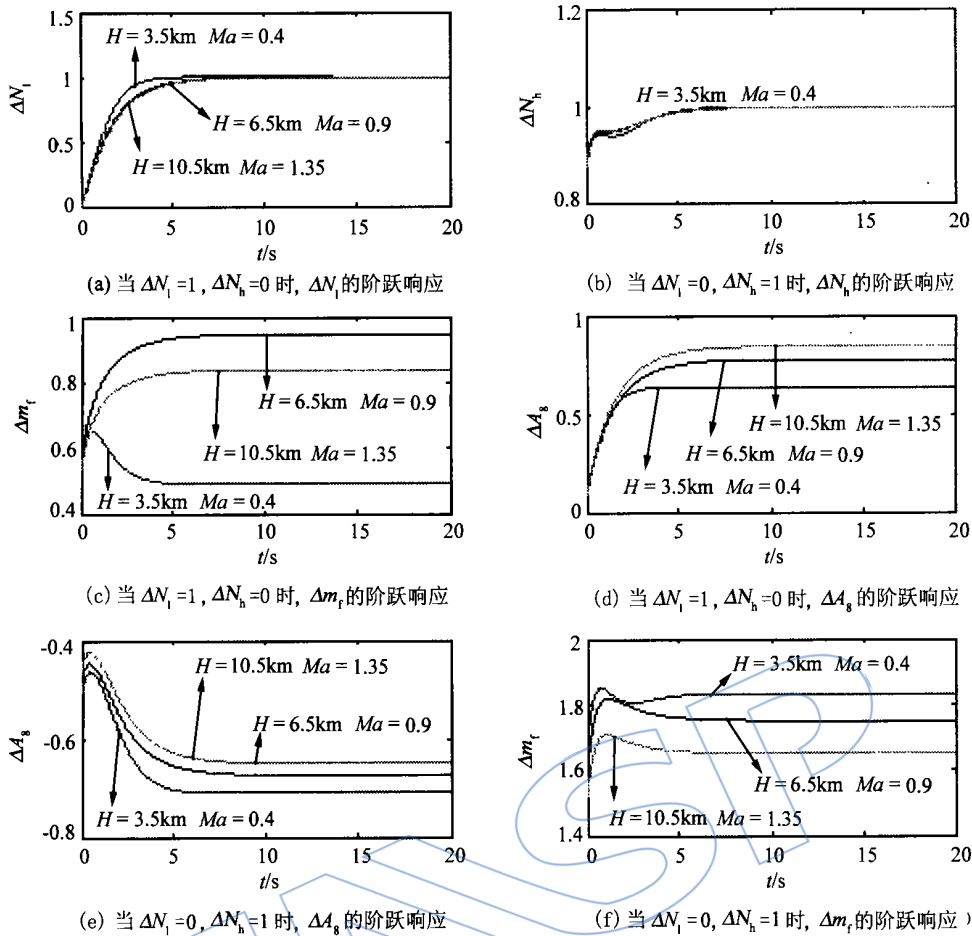


图 3 当 $\gamma = 10$ 时, 发动机在飞行包线内第三工作区^[4]中 3 个不同工作点的阶跃响应

Fig 3 Step response of some aero-engine at three working points in the third partitioned region^[4] when $\gamma = 10$

$$F_P = \begin{bmatrix} -3.8114 & -12.7563 \\ 0.8962 & 3.8525 \end{bmatrix}$$

$$F_I = \begin{bmatrix} -10.9747 & -36.0968 \\ 1.7934 & 7.7908 \end{bmatrix}$$

将其加到发动机对象, 单位阶跃响应如图 3 所示。

从图 3 知, γ 值变大, u 对 y 影响加大, 按上述方法所得控制器性能下降, 如调节时间变长。因此, 实际中应使 γ 值尽量小些, 但从引理 1 知, γ 值不能任意小。

上述方法对全飞行包线其他 11 个工作区域内均进行了控制器的设计及其仿真验证, 结果类似, 由于篇幅有限, 从略。

4 结 论

本文提出了一种将非严格正则的发动机模型转化为严格正则模型的处理方法, 进而利用 LM I

技术, 对严格正则模型设计了静态输出反馈 PI 控制器, 并在设计中考虑了控制约束的影响。将此方法应用到某型双转子航空发动机的控制器设计中, 仿真验证结果表明, 控制系统较好的动态和静态品质, 并具有一定鲁棒性。

参考文献

- [1] Jeremy G VanAntwerp, Richard D Braatz. A Tutorial on Linear and Bilinear Matrix Inequalities [J]. Journal of Process Control, 2000, 10 (4): 363- 385
- [2] 王德进. H_2 和 H_∞ 优化控制理论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.
- [3] Cao Y-Y, Lam J, Sun Y-X. Static output Feedback Stabilization: An LM I Approach [J]. Automatica, 1998, 34: 1641- 1645
- [4] 王曦, 孟庆明. 航空发动机多变量鲁棒数字控制器的设计 [J]. 航空动力学报, 2001, 16 (3): 295- 299
- [5] 王曦, 韩乃湘, 李喜发, 李运华. 航空发动机鲁棒 H_∞ /PI 状态反馈控制, 推进技术 [J]. 2003, 24 (4): 394- 397.